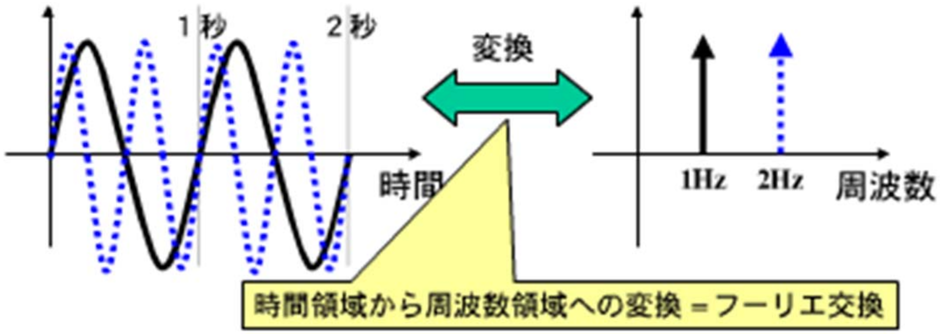
フーリエ変換

Fourier Transformation

フーリエ変換とは

工学的に使われるフーリエ変換はひとことで言うと、信号の「時間領域」表現と「周波数領域」表現の変換です。



数式を書くと

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

ですが…どうも見た目からして近寄りがたいので今回はフーリエ変換の「気持ち」を理解していきましょう。

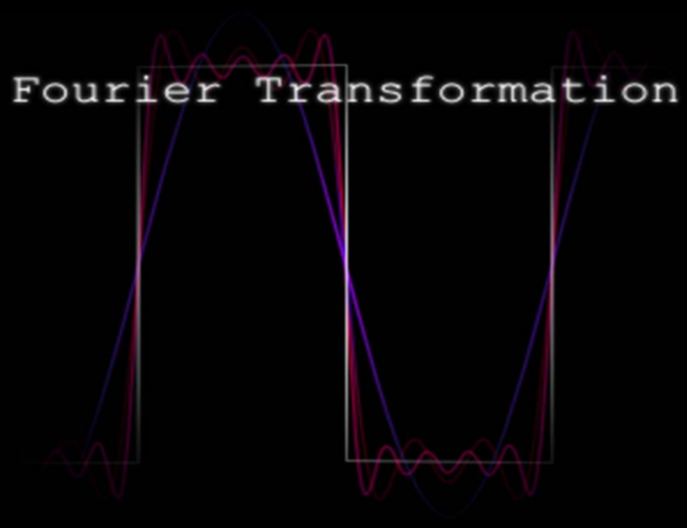
Contents

ジョゼフ・フーリエとフーリエ変換の誕生

フーリエ変換を理解するための準備

フーリエ解析

いろいろな音（音波）のフーリエ解析



ジョゼフ・フーリエと
フーリエ変換の誕生

Jean Baptiste Joseph Fourier
（1768 – 1830）

フランスの数学者・物理学者。

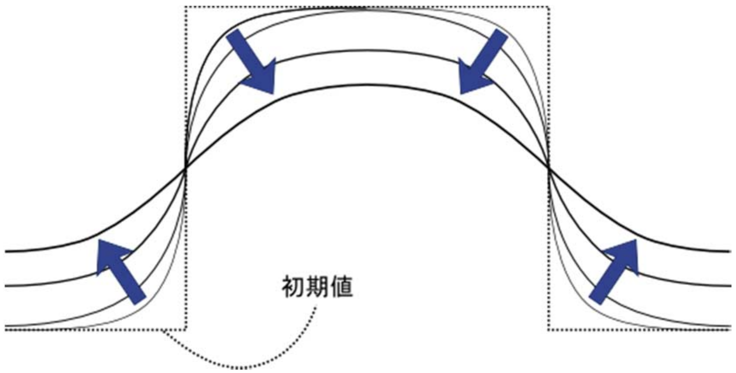
固体内での熱伝導に関する研究から熱伝導方程式（フーリエの方程式）を導き、これを解くためにフーリエ解析と呼ばれる理論を展開した。フーリエ解析は複雑な周期関数をより簡単に記述することができるため、音や光といった波動の研究に広く用いられ、現在調和解析という数学の一分野を形成している。

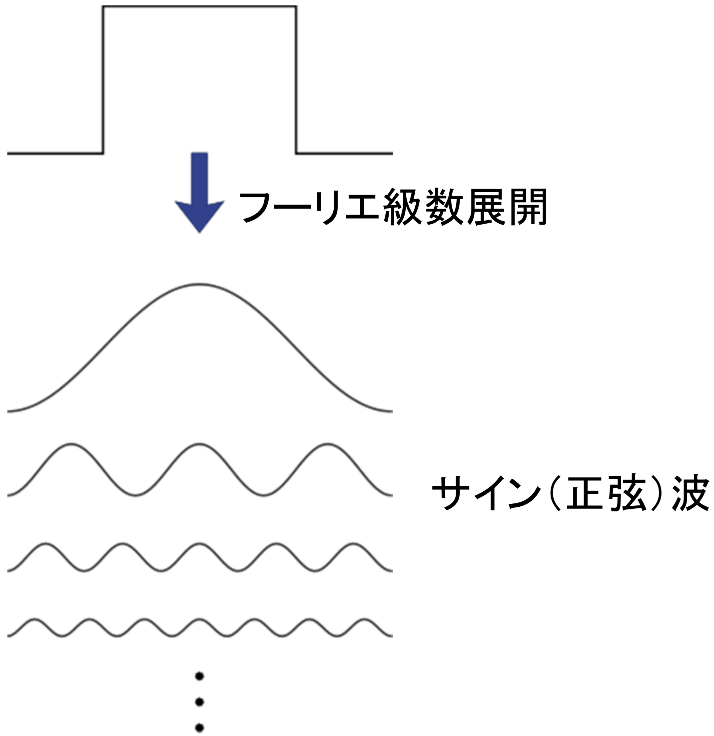
このほか、方程式論や方程式の数値解法の研究があるほか、次元解析の創始者と見なされることもある。また統計局に勤務した経験から、確率論や誤差論の研究も行った。

（出典：Wikipedia）

フーリエの熱伝導の研究

ある区間において、真ん中付近の区間における温度が一様に高く，それ以外の温度は一様に低いという状態から時間の経過とともにどのように均されていくのかということを、フーリエ級数展開によって求めた。





「ほとんどすべての関数は，サイン波の重ね合わせで表現できる」

1807年にパリの科学アカデミーに提出された熱伝導に関する最初の論文は、ラグランジュ、ラプラス、モンジュ、アンペールが論文の審査委員会の委員となった。ラプラスとラグランジュはフーリエ級数展開の正当性を疑問視し、ラプラス、ビオ、ポアソンは熱伝導方程式の説明が不十分であると指摘し、アカデミーは内容が不十分だとして掲載は見送った。

しかしその有望さから、パリの科学アカデミーは、1812年のアカデミー賞をかけた問題として、次の課題を発表した。

「熱の伝導の法則の数学的理論を与え、この理論の結果と精密な実験結果とを比較せよ」

フーリエは大幅に加筆訂正した第二論文を提出した。審査員のひとりであったラグランジュは、その数学的厳密性に難があると厳しく指摘した。しかしながら重要性が認められ、この論文はアカデミー大賞を受賞した。

しかし、「ほとんどすべて」の範囲や「表現できる」という根拠をめぐる議論が様々になされ、フーリエ変換の真価が認められるのは20世紀後半になってからのことだった。

（※ある有限区間上の関数を三角関数の級数で表すことをフーリエ級数展開といい、無限区間に拡張されたそれをフーリエ変換という。）

フーリエ変換を理解するための準備

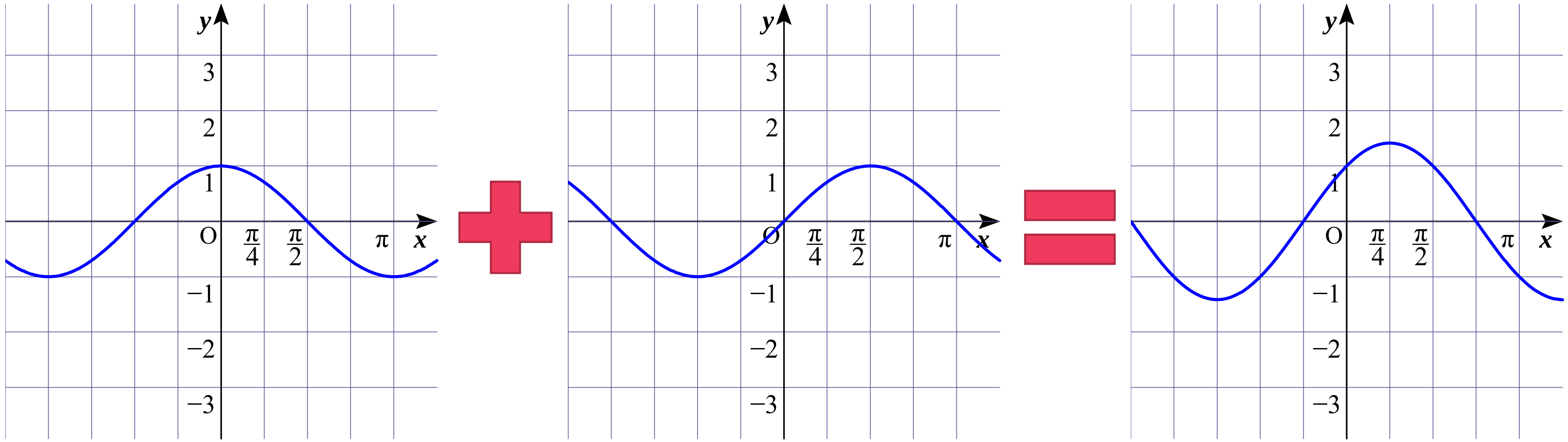
1. 三角関数の和で波形を作る

1. 三角関数の和で波形を作る

まず、同じ周期の$a\cos mx$と$b\sin mx$についての和を考えてみる。

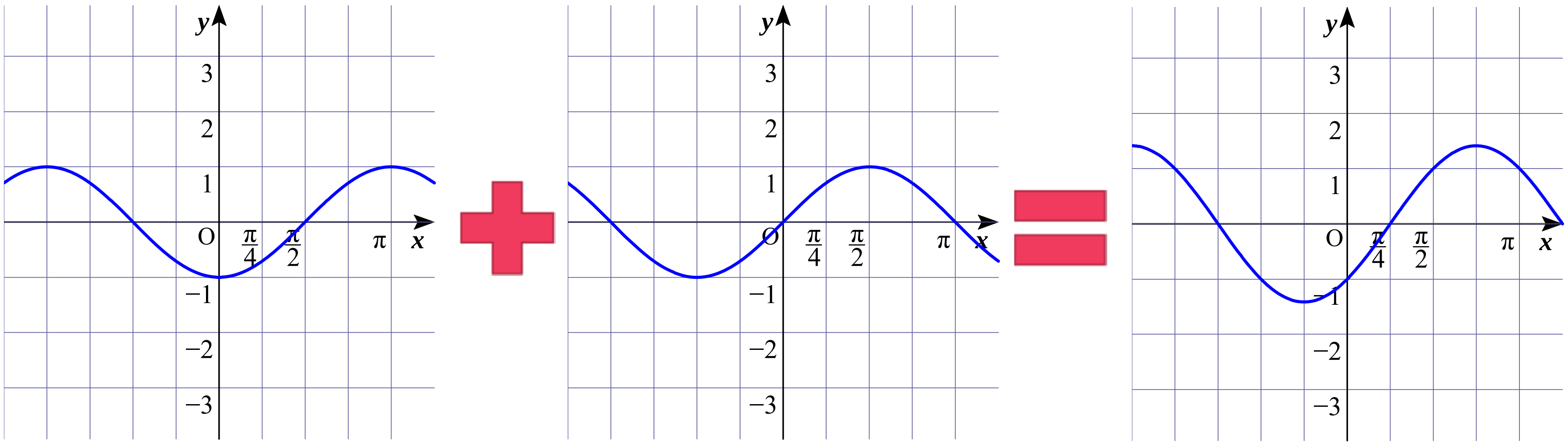
簡単にするために$m=1$とする。

① $a=b=1$, $y=\cos x+\sin x$ のグラフ



1. 三角関数の和で波形を作る

② $a = -1\,, b = 1\,, y = -\cos x + \sin x$のグラフ



1. 三角関数の和で波形を作る

①、②から、位相が変化していることがわかる。自然界に存在する波形は必ずしも0から始まっているとは限らない。

だから

位相を変化させるためには$\cos x$と$\sin x$を組み合わせる必要がある！

1. 三角関数の和で波形を作る

位相を示すには$\sin(x+\theta)$という形でθを変化させてあらわす方法があるがこの場合は無限にθが必要。

そこで

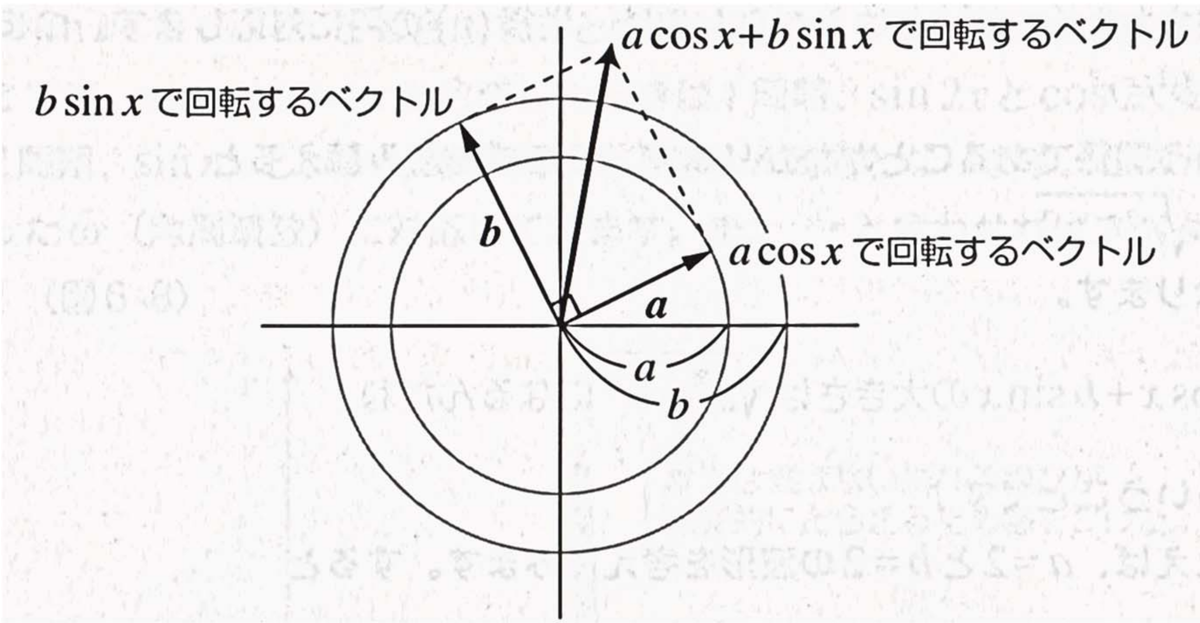
個別の関数をそのままの形で扱うのではなく、ある「直交する関数の組み合わせ」として扱う考え方が必要になってくる。

サイン波に関しては$\cos x$と$\sin x$というたった2つの関数でいろいろな位相の$\sin(x+\theta)$を作ることができる。

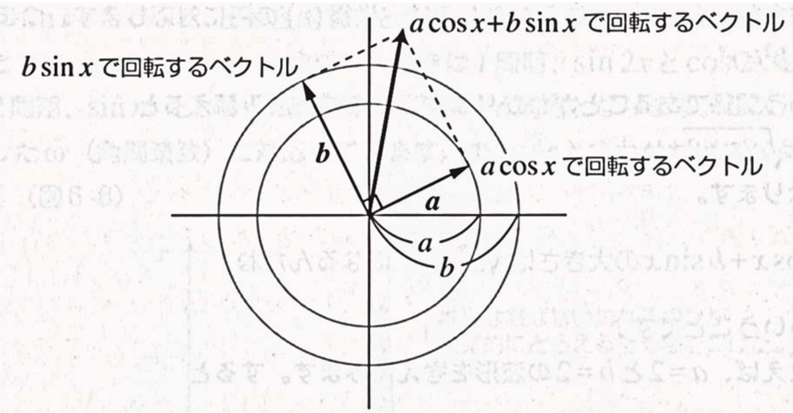
1. 三角関数の和で波形を作る

そして、$a\cos x$ と $b\sin x$を合成した波形は振幅も変化する。

ここで、$a\cos x$ と $b\sin x$を円周上を回転するベクトルに置き換えてみると、



1. 三角関数の和で波形を作る



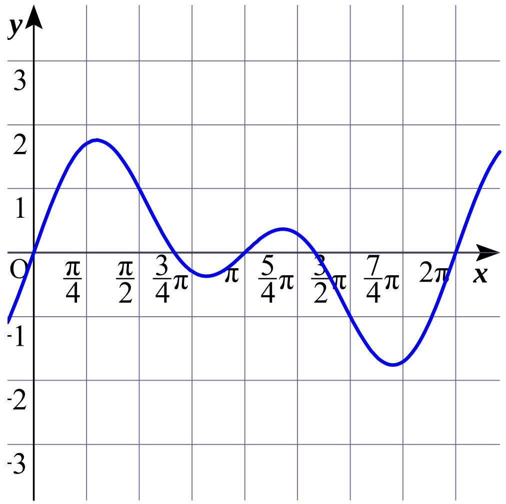
ベクトルの長さをみると、合成されたベクトルは$\sqrt{a^2+b^2}$という長さをもっていることがわかる。

このaとbを適当に組み合わせることによって、振幅と位相を自由に作り出すことができる！

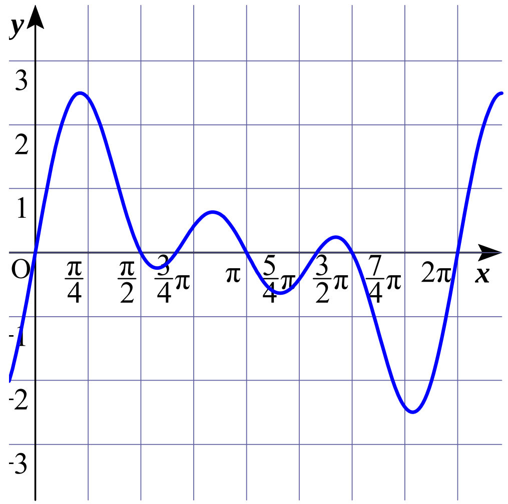
2．違う周期の三角関数を合成する

2. 違う周期の三角関数を合成する

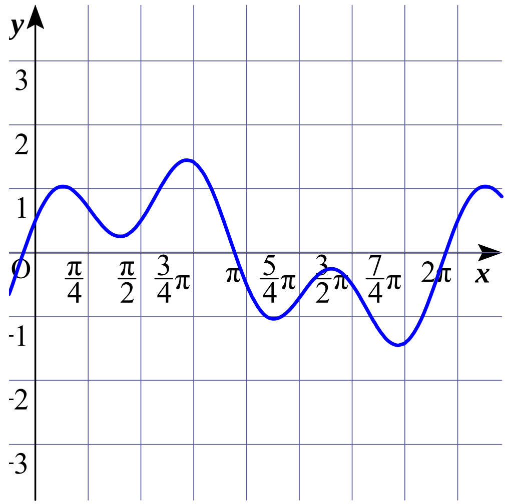
$\sin x + \sin 2x$



$\sin x + \sin 2x + \sin 3x$



$\sin x + 0.5 \cos 3x + 0.5 \sin 3x$



このようにsin、cosの組み合わせからさまざまな形のグラフを作り出すことができる！

3. フーリエ級数

3. フーリエ級数

もっと多くの関数を足し合わせることで、もっと複雑な関数を作り出すことができる。

フーリエ級数展開

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$$

この式は、左辺の$F(x)$という関数が、右辺のcosとsinの合成された形によってあらわすことができるという意味。

式の最初の$\frac{1}{2}a_0$は、とりあえず、そのあとに続く波形の式を全体に上下させるためにあるものと考える。($y = ax + b$のbみたいなもの)

3. フーリエ級数

フーリエ級数展開

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$$

フーリエ級数展開は、関数$F(x)$がある周期をもっているとき、つまり「周期関数」の合成に利用することが前提になっている。周期関数でない場合でも、ある区間で区切り、その区間が繰り返されていると仮定することで、波形を合成することができる。

3. フーリエ級数

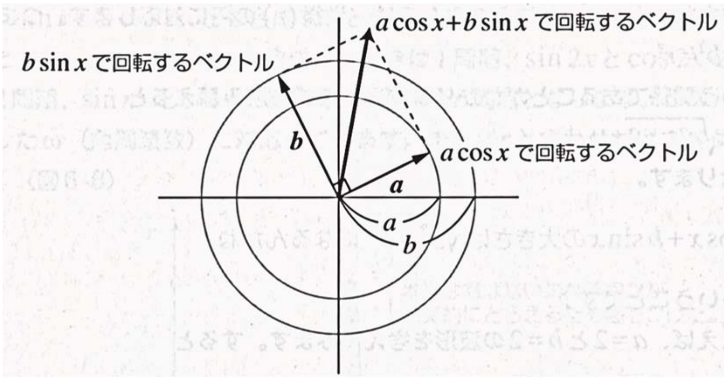
フーリエ級数展開

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$$

$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots b_n \cdots$は「フーリエ係数」と呼ばれ、この係数の値を示すだけで$F(x)$の波形の形を決めることができる。



3. フーリエ級数

例として

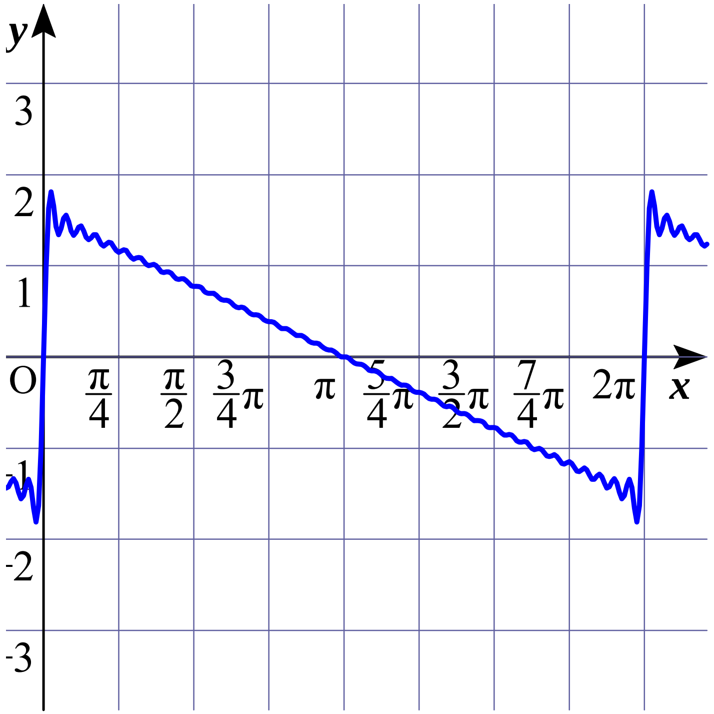
$F(x) = \sum_{n=1}^{40} a_n \sin nx \quad , \quad a_n = \frac{1}{n}$

のグラフをみてみると

右のようになる。

これを「のこぎり波（鋸歯状波）」

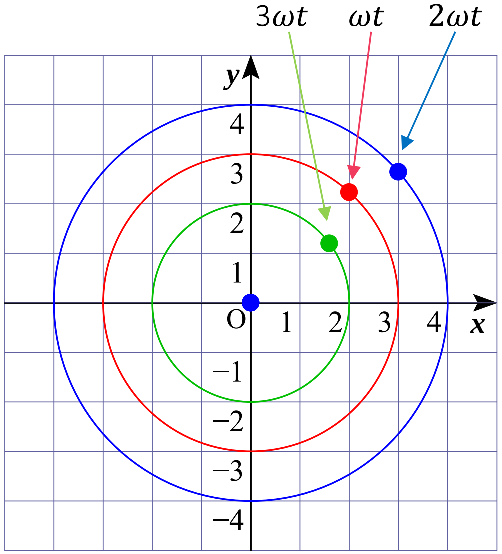
という。

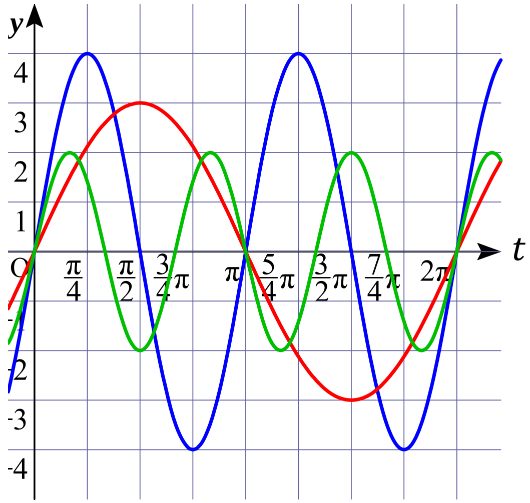


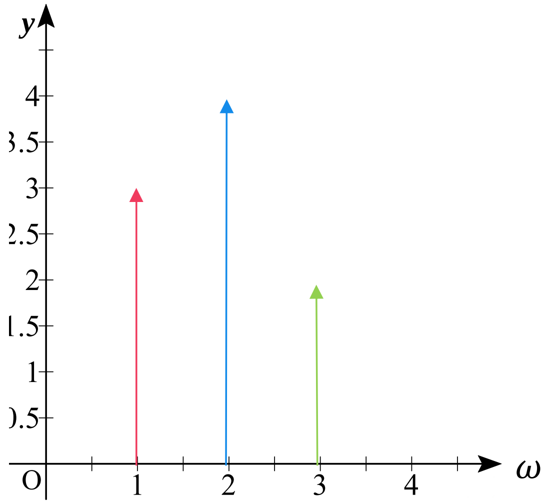
4. 時間関数と周波数スペクトル

4. 時間関数と周波数スペクトル

3つの円周上をそれぞれはやさの異なる点を時間の関数としてグラフにするとsin関数になる。また、ここからωを横軸にしてスペクトルが書ける。

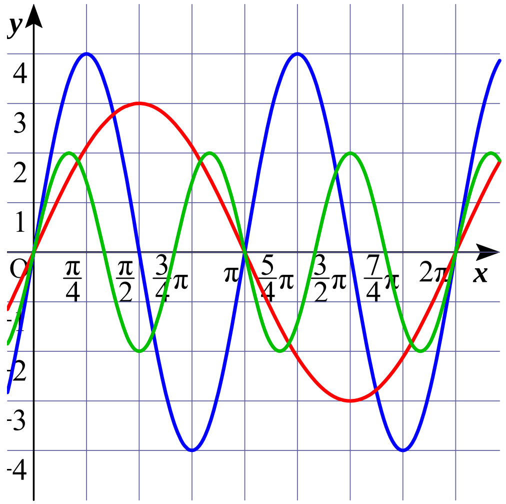


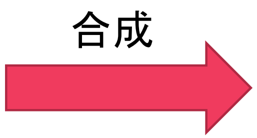


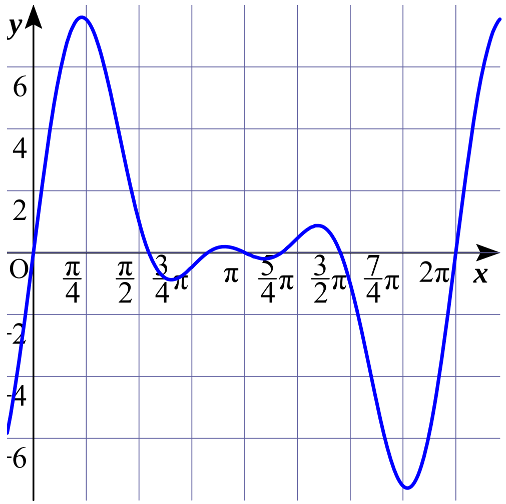


4. 時間関数と周波数スペクトル

さて、先ほどの3つの波、$4\sin 2x, 3\sin x, 2\sin 3x$ を合成してみよう。

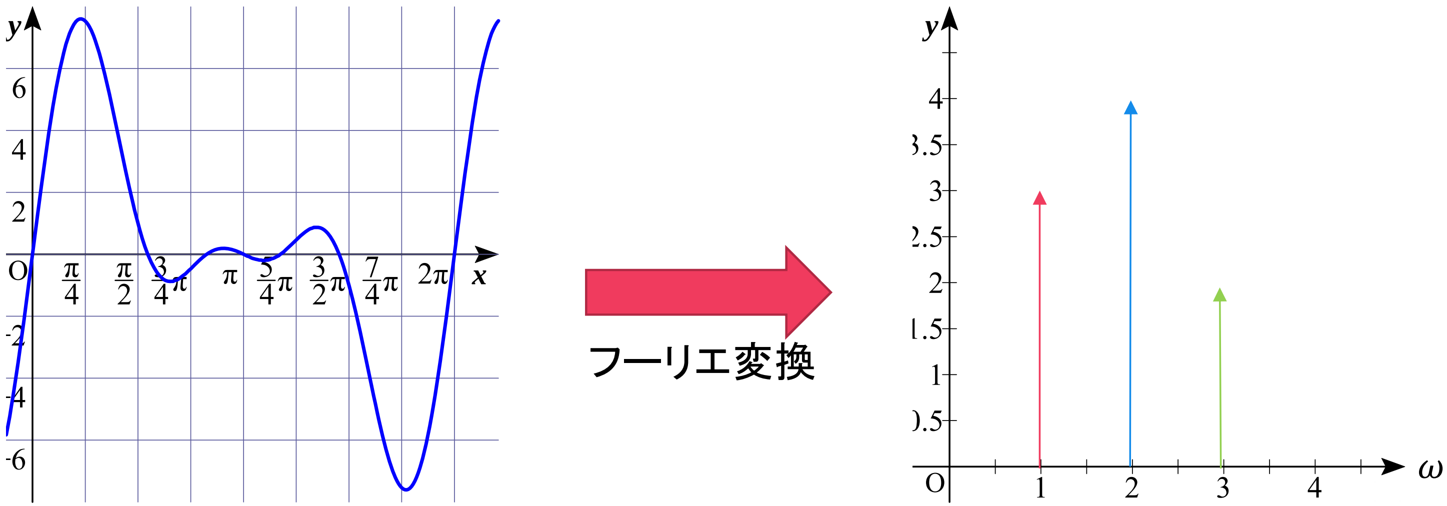






4. 時間関数と周波数スペクトル

フーリエ変換



「フーリエ変換」というのは、このように合成された関数から合成される前のそれぞれの周波数とその大きさを計算で見つけ出すことである。

4. 時間関数と周波数スペクトル

フーリエ変換では、何らかの形で波形がある一定の周期の繰り返しを持つ「周期関数」になっている必要がある。

なぜなら

さまざまな周期や振幅の三角関数を組み合わせると、いろいろな形の波形を作り出すことができるが、結果としてフーリエ級数で作り出せるのは「周期関数」になっているからである。

例えば、$\sin 2x$と$\sin 3x$と$\cos x$を組み合わせると、その基準となる$\sin x$（＝一番長い周期の三角関数）を一区切りの周期として繰り返す「周期関数」になる。

4. 時間関数と周波数スペクトル

「フーリエ級数展開による合成」と「フーリエ変換による解析」は逆の操作だから、フーリエ級数によって作り出された関数が周期関数であれば、フーリエ変換で変換される関数も周期関数であるべきである。フーリエ変換はある関数がどのような三角関数の組み合わせでできているかを調べる方法だから、元の関数を何らかの形で一番長い周期に対応した「1周期」と捉えなければならない。

自然現象の波の多くは必ずしも周期関数ばかりではないので、短い時間に区切って、その区間の範囲を繰り返す周期的な現象と考え、フーリエ変換を行う。

フーリエ解析

フーリエ変換を使った波形の解析

1. 周波数成分を調べる手順

1. 周波数成分を調べる手順

STEP1　複雑な波形を周期関数として扱うために区間を区切る

元の波形が「音」のような非周期関数の場合、例えば1秒という時間で区切るとする。

この区切った部分を最大周期と考えると、この場合は周波数でいうと1Hzが一番低い周波数になる。

1. 周波数成分を調べる手順

STEP2　調べようとする周波数を決める

調べる周波数を一つ決める。ただし、一つやったら終わりではなく、一番低い周波数から計算可能な一番高い周波数までのすべての周波数成分を一つずつ調べる必要がある。

1. 周波数成分を調べる手順

STEP3　一つ一つの周波数を抽出する

切り取った区間からある特定の周波数成分を抽出させることのできる「フィルター」を使って、例えば、a_1用フィルターを使って$\cos x$成分を抽出するといった感じでやる。

1. 周波数成分を調べる手順

STEP4　スペクトルを作る

抽出した周波数成分の大きさを測り、周波数の大きさ順にグラフを作る。

2. フーリエ係数

フーリエ級数

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$$

このとき、「$\cos nx$」や「$\sin nx$」のxの前についているnが「周波数」に対応し、sin、cosの大きさを決める係数がa_n, b_nである。このa_0, a_n, b_nを「フーリエ係数」という。

元の波形$F(x)$からa_0, a_n, b_nを求めることで、いろいろな周波数成分から、ある特定の一つを抽出できる！

2. フーリエ係数

ここで、考えなければならないのは、先ほど少し出てきた「関数の直交」という考え方である。

定義

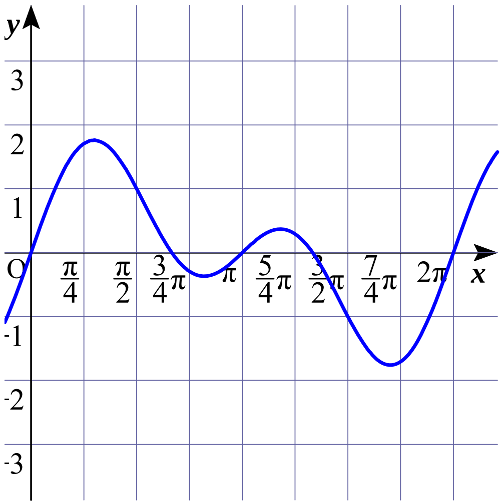
ある2つの関数の積を積分した結果が0になるとき、 この2つの関数は「直交する」という。

フーリエ変換に用いるのは$\cos nx$と$\sin nx$という2つの「直交する」関数であり、直交関係のこの特徴を用いることで、周波数成分の抽出が可能になる。

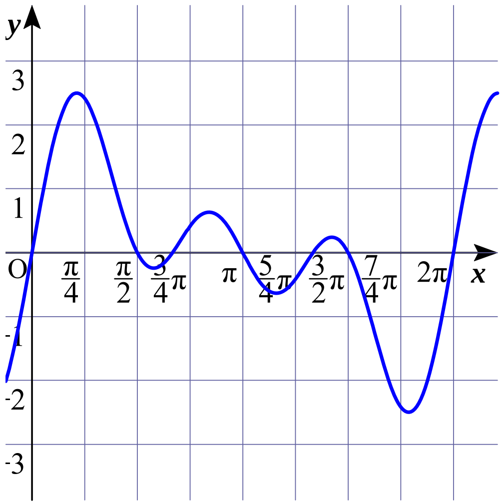
2. フーリエ係数

先ほどのさまざまな違う周期の三角関数を見てみると、積分計算しなくても積分結果が0であることは、感覚的にわかる。

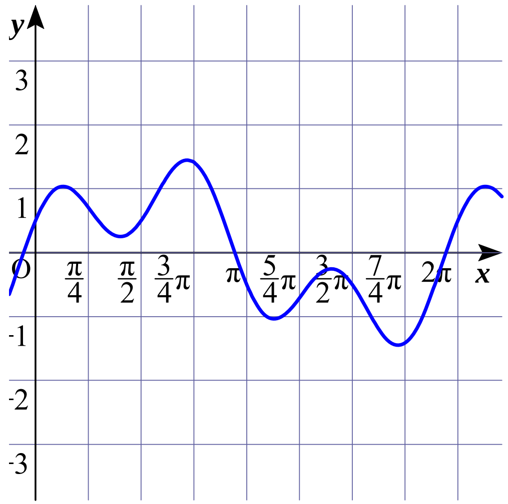
$\sin x + \sin 2x$



$\sin x + \sin 2x + \sin 3x$



$\sin x + 0.5 \cos 3x + 0.5 \sin 3x$



つまり、mとnが異なる整数のとき、$\sin mx$ と $\sin nx$は直交している、といえる。また、cosについても同じことがいえる。

2. フーリエ係数

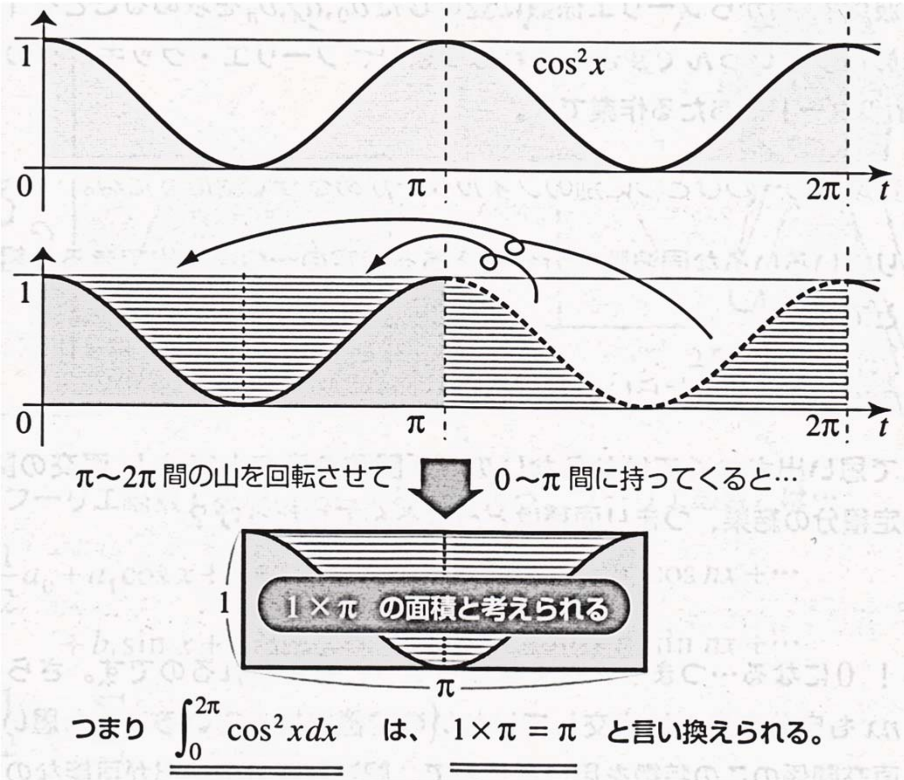
まずはcosのフーリエ係数「a_n」について考えてみる。

$a_n \cos nx$だけ残したい場合は$F(x)$全体に$\cos nx$をかけて定積分すればよい。

すると、nの値が等しいcosどうしは直交しないので、1つの関数が残り、後は全て直交関係にあるために積分結果は0となる。

2. フーリエ係数

$\cos x \times \cos x$つまり$\cos^2 x$の積分結果は「π」になる。これを図で見ると、



2. フーリエ係数

ここで知りたいのは「a_n」で、$\cos^2 x$の場合はa_nが1なので$1 \times \pi = \pi$といえた。

つまり、逆に考えると、a_nを知りたければ、面積を求める積分の式をπで割ればよい！

これを式にして示すと、$\cos nx$の積分式をπで割る、つまり$\frac{1}{\pi}$をかけるので、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx$$

となる。

sinについても全く同じことがいえるので、

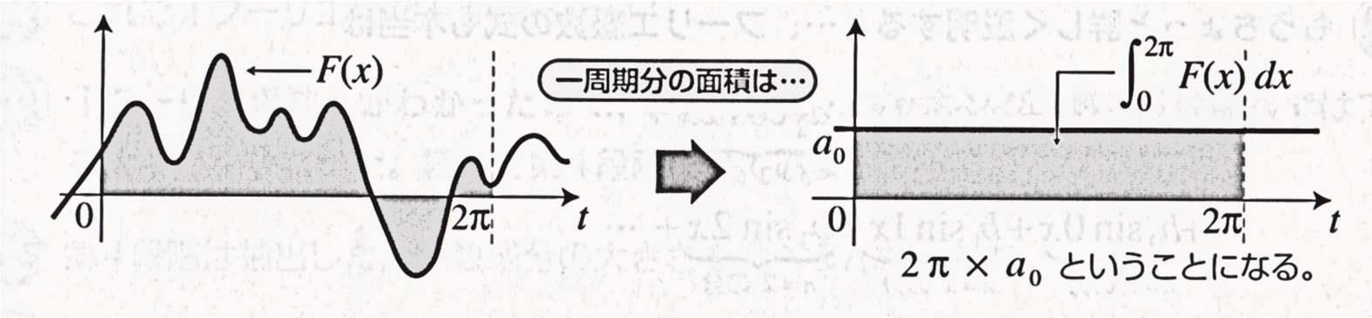
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx$$

も成り立つ。

これが「フーリエ係数」である。

2. フーリエ係数

つぎに、a_0について考えてみる。図を見てみると、



先ほどと同じように考えると2πで割る、つまり$\frac{1}{2\pi}$をかければよいので

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx$$

となる。

2. フーリエ係数

ここで、「そもそもa_0とは何か？」ということを考える。

a_0にもaがついている以上はやはり$\cos$のフーリエ係数である。

つまり、a_0だけを特別扱いしなくても、

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx$$

もいえる。しかし、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx$$

に$n = 0$のときの$\cos 0$を入れて計算すると、求まるのはa_0の2倍の$2a_0$なので、つじつまを合わせるために、フーリエ級数の先頭に$\frac{1}{2}$をつける。

2. フーリエ係数

フーリエ級数の式も本当は

$$F(x) = \boxed{\begin{matrix} a_0 \cos 0 \\ b_0 \sin 0 \end{matrix}}_{n=0} + \boxed{\begin{matrix} a_1 \cos x \\ b_1 \sin x \end{matrix}}_{n=1} + \boxed{\begin{matrix} a_2 \cos 2x \\ b_2 \sin 2x \end{matrix}}_{n=2} + \boxed{\begin{matrix} a_3 \cos 3x \\ b_3 \sin 3x \end{matrix}}_{n=3} \begin{matrix} + \cdots \\ + \cdots \end{matrix}$$

となっていて、$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$なので、

$$F(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots$$
$$+ \ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

となる。

2. フーリエ係数

これを元に、

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx \end{cases}$$

としてもよいのだが、$\frac{1}{2\pi}$と$\frac{1}{\pi}$をそろえて、$n = 0$のときは$\frac{1}{2}a_0$にする。

これより、フーリエ係数は

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx \end{cases}$$

である。

3. スペクトルを求める

ここまで見てきたように、一つの周波数成分にはsin関数の成分とcos関数の成分があった。

そして、それらに対応したフーリエ係数はb_nとa_nで表される。

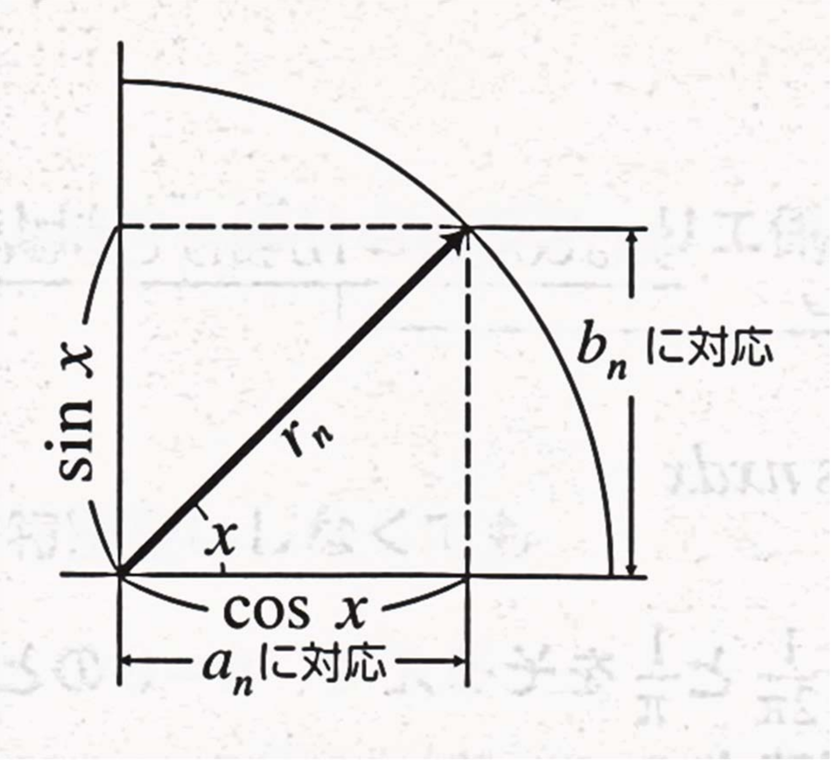
しかし、スペクトルとして考える場合は、それぞれの成分の係数ではなく、その周波数成分の大きさに注目する必要がある。

3. スペクトルを求める

周波数成分の大きさを図で考えると、

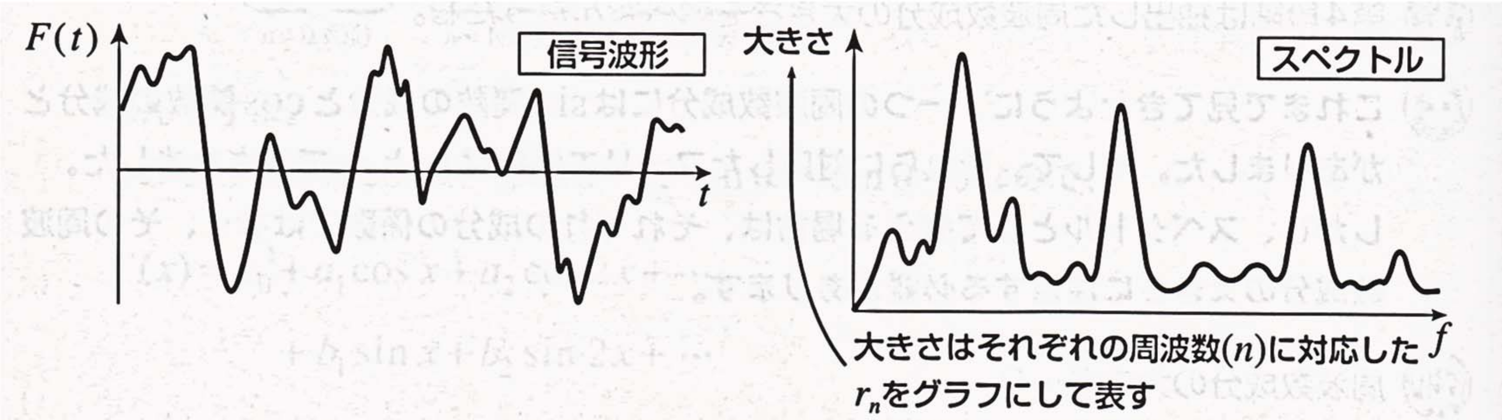
$$r_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

と計算できる。



3. スペクトルを求める

計算したr_nをnの小さい方から順番に右に向かってグラフにすることで「スペクトル」が得られる。

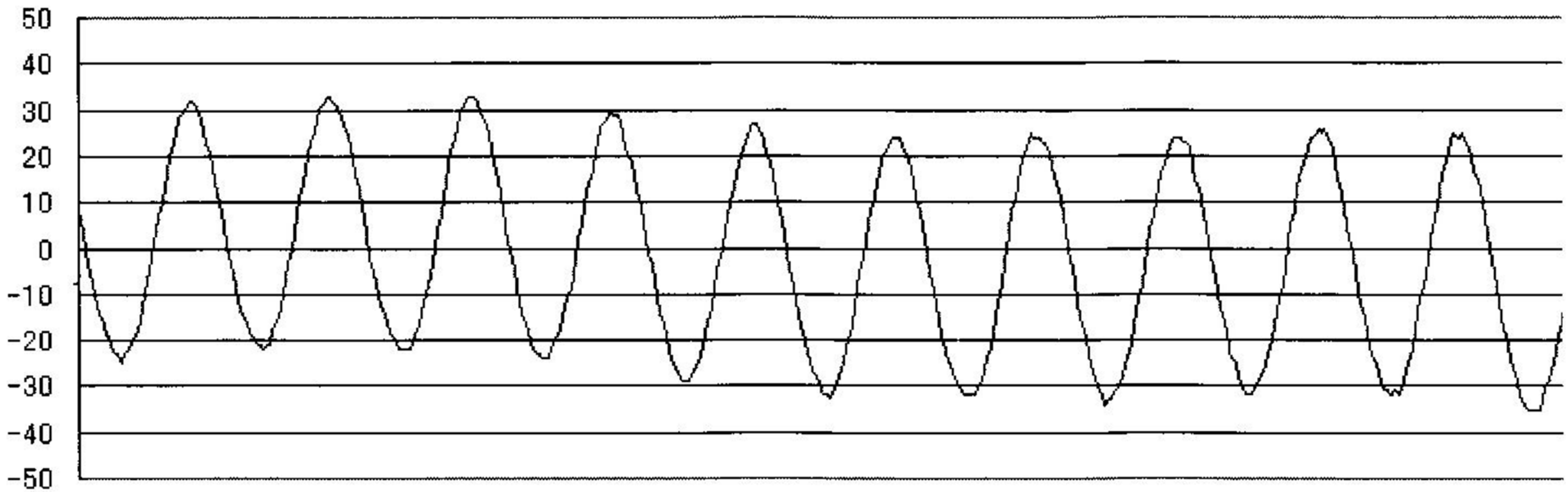


このようにして、フーリエ変換を使って波形を解析することができる。

いろいろな音（音波）のフーリエ解析

1. 音叉のスペクトル

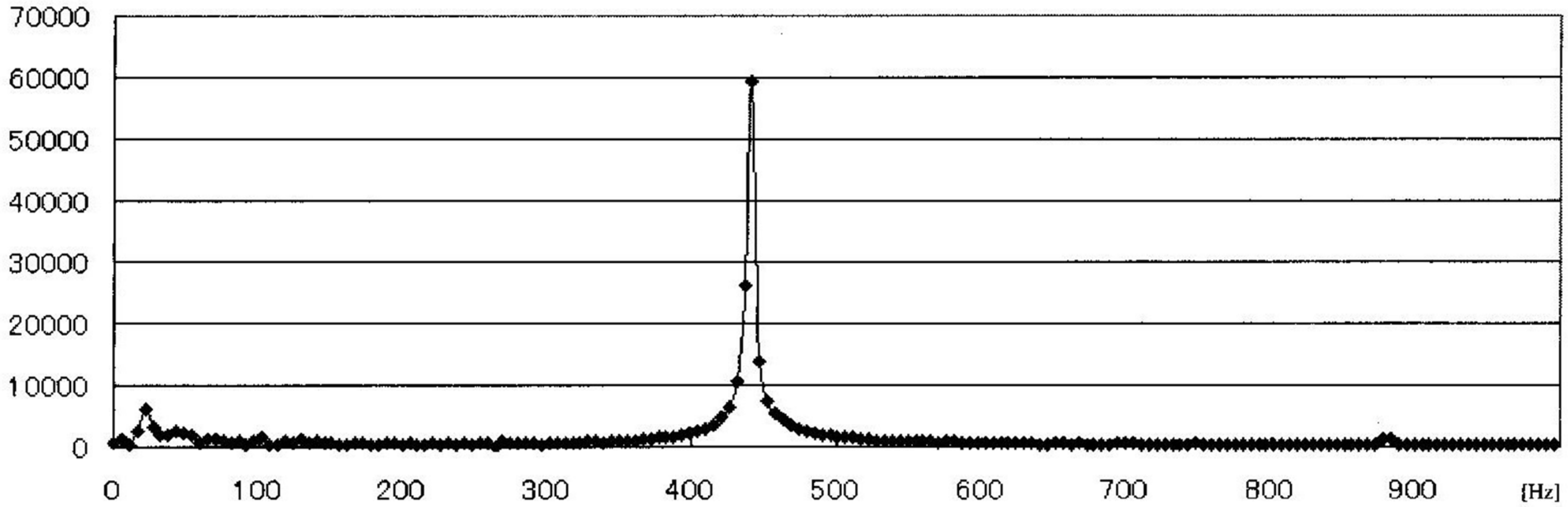
楽器調律用音叉は440Hzの音を出す。



少し上下に揺れているがsin関数そのものである。

1. 音叉のスペクトル

スペクトルを見てみると、



音叉の波形はほぼ単一の周波数から成り立っていることがわかる。

1. 音叉のスペクトル

個人差はあるが一般的にsin関数の単一な周波数の音は、プーとかポーのような非常に単純な音に聞こえる。

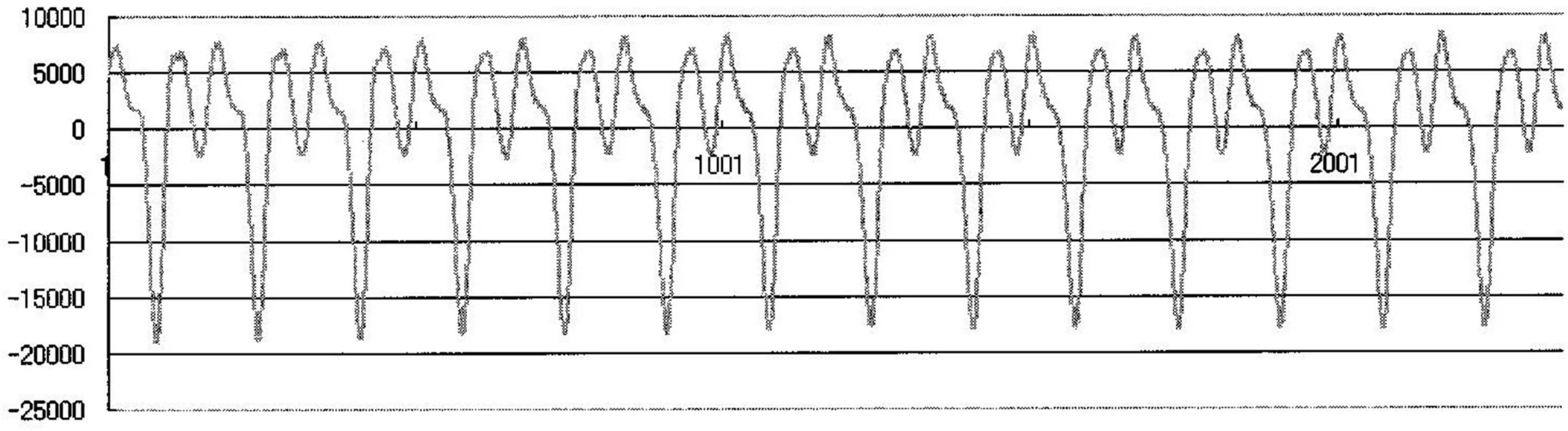
7kHz以上になるとキーンというような高い音に聞こえる。

2. ギターのスペクトル

ギターは、6本の太さの違う弦が張ってあり、押さえる位置によってそれぞれの音階を作り出す。1音ずつ弾くことによってメロディーラインを奏でることもでき、また、複数の弦を同時に押さえて弾くことによって和音を作り出し、厚みのある音を奏でることもできる。

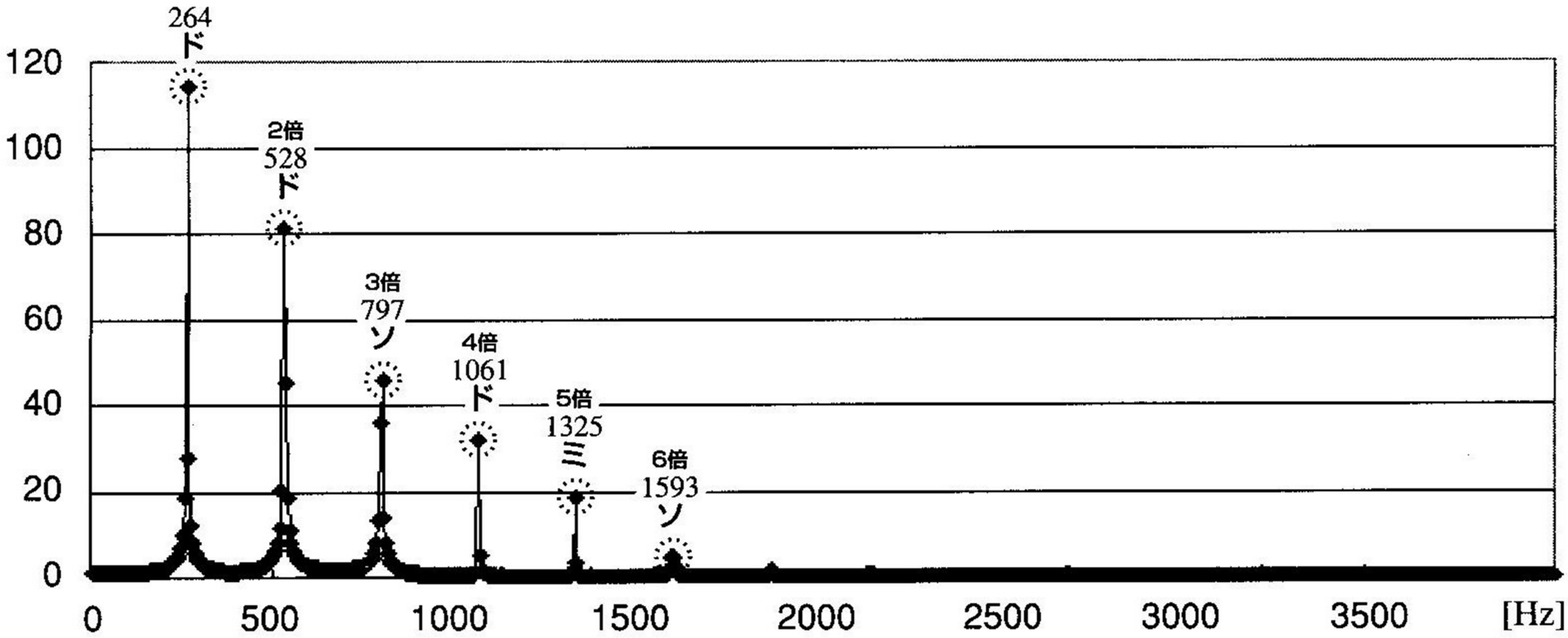
2. ギターのスペクトル

①ド（C）を単音で鳴らした時の音の波形

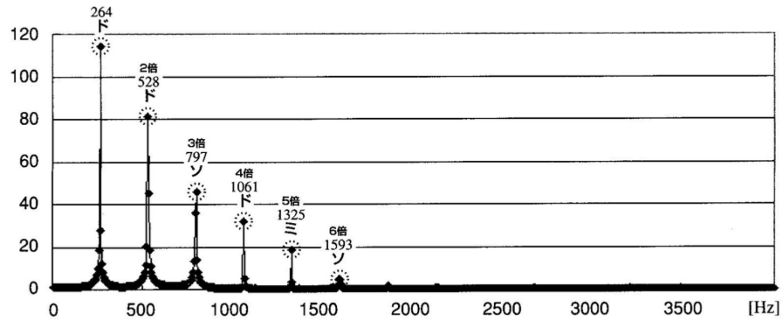


2. ギターのスペクトル

これのスペクトルに主なピークの周波数を書き込むと、



2. ギターのスペクトル



ラの音を「440Hz」と決めているのは「国際基準周波数」で、「国際基準」でのドの音の周波数は261.63Hzである。

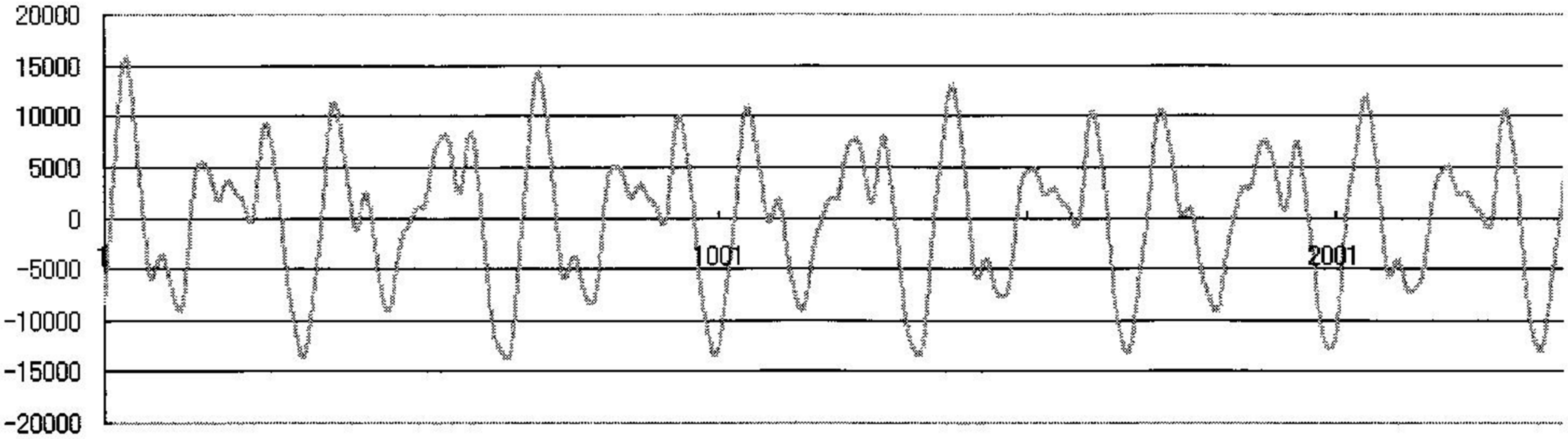
この解析結果で一番大きなスペクトルは264Hzになっているので、このギターは少しチューニングが高めになっていることがわかる。

また、その次に大きなスペクトルをもつ周波数を順に見ていくと、528HZ・797Hz・1061Hz・1325Hz・1593Hzというように、もとの「ド」の音（基底音）のほぼ2倍、3倍、4倍・・・と周波数のピークがあり（倍音）、その大きさは周波数が高くなるにしたがって小さくなっている。

このようなスペクトルは、先ほど出てきた「のこぎり波」とよく似ている。それは、基準になる音（周波数）「ド」の倍音（高調波）が偶数次も奇数次も含まれているからである。

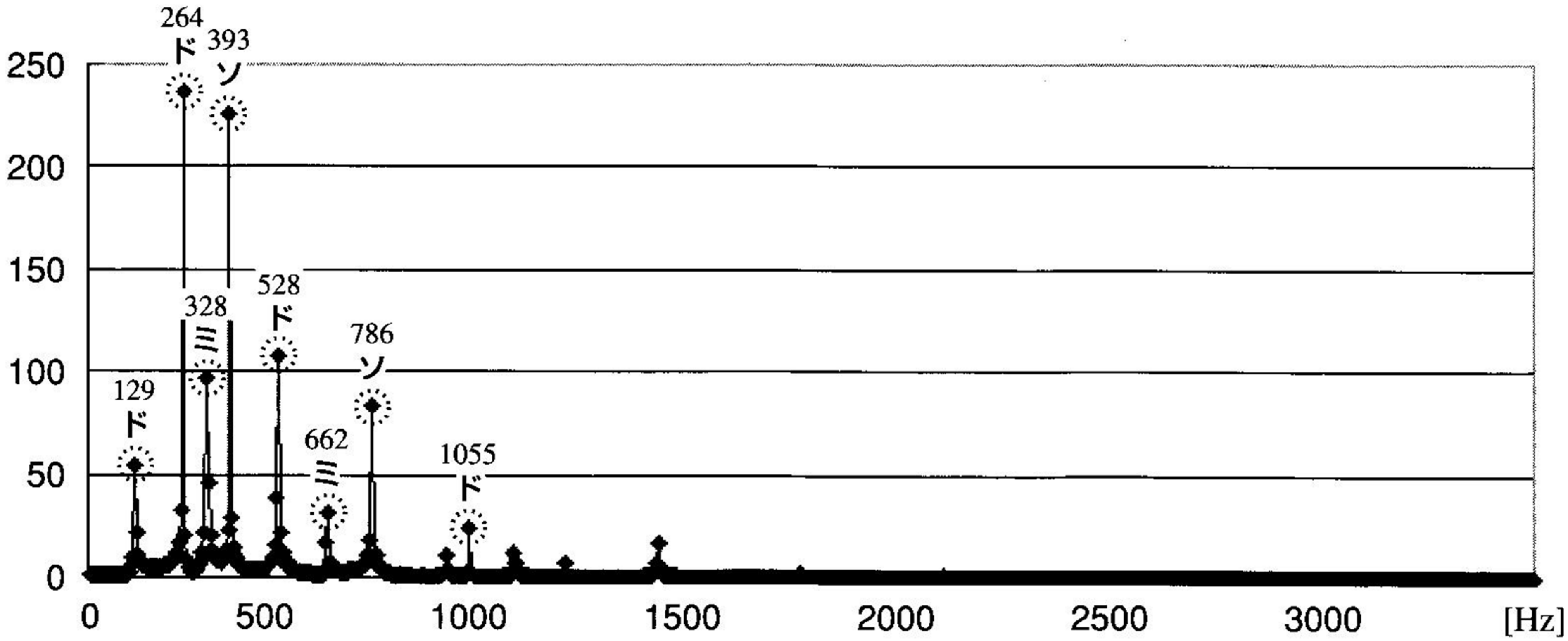
2. ギターのスペクトル

②ド（C）、ミ（E）、ソ（G）を同時に鳴らした時の波形



2. ギターのスペクトル

これもスペクトルに主なピークの周波数を書き込むと、

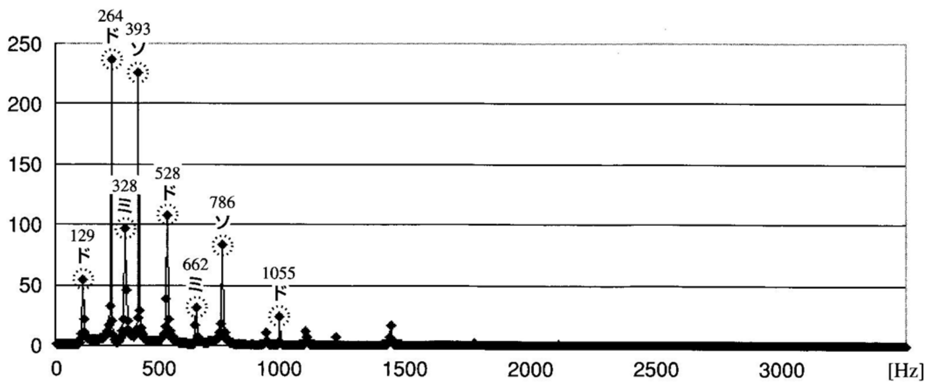


2. ギターのスペクトル

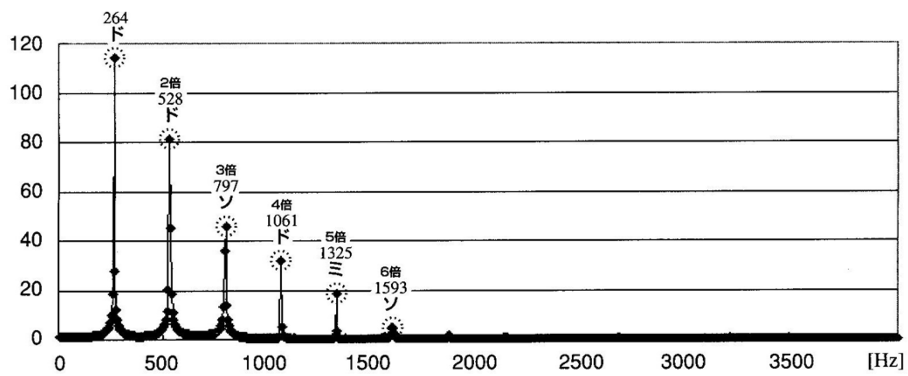
きちんとド・ミ・ソの基底音が確認できる。

しかしこのとき、ドの音の高調波の比率が単音を弾いた時よりも急激に小さくなっていくことがわかる。

和音を弾くと、一つ一つの基準の音の高調波を生じさせるエネルギーより、和音を合成するエネルギーに使われていると考えられる。

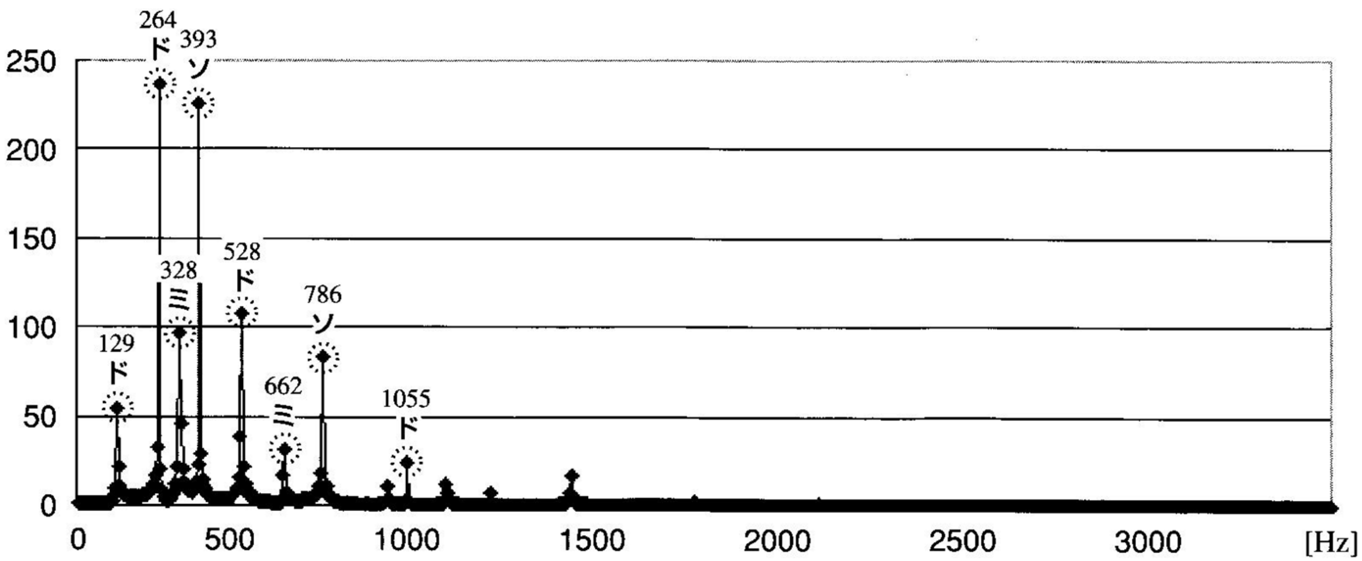


ド(C)・ミ(E)・ソ(G)の和音



ド(C)単音

3. 和音



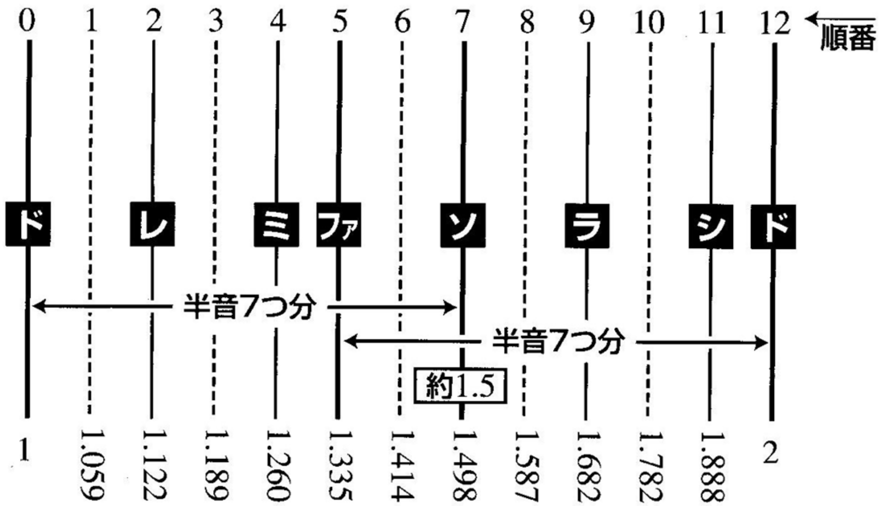
ド・ミ・ソを同時に弾いたとき、ミのスペクトルが、ドやソに比べて小さくなっている理由を考えてみる。

3. 和音

鍵盤楽器や、ギターのようにフレットのついた楽器は、「平均律」という調律をする。

1オクターブ（周波数比で1：2）を12音に分け、その隣り合う音の周波数の比率を同じにしている。1に12回同じ値を掛け算して2（1オクターブ）になるという考え方をしているので、その比率は$\sqrt[12]{2}$である。（$\sqrt[12]{2} = 1.059463\cdots$）

その一段階毎の隣り合う音の関係を「半音」という。



3. 和音

ここから考えると、ドとその上のソの周波数比はほぼ1：1.5、つまり2：3になっている。このような簡単な整数比で表される周波数の関係にある音は、お互いに強め合う性質がある。

一方、「ドとミ」の周波数比はおよそ6：7、「ミとソ」の周波数比はおよそ7：9である。

これらの比は簡単な整数比ではあるが、2：3に比べれば少し複雑である。

周波数比が単純であるかどうかが、音を強めあうかどうかに関わってくる。単純なほどより強めあうことになる。

しかし、比較的小さくなったとはいえ、重要なスペクトル成分であることには変わりはなく、これが和音による音の厚みである。

おわり

ありがとうございました。